# 平面曲線に台を持つholonomic系のRosenlicht型構造定理について(代数解析学の諸相)



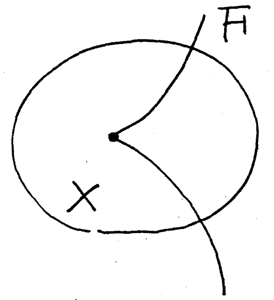
田島, 慎一

数理解析研究所講究録
660巻 1988年 164-179

# 平面曲線に台を持つholonomic系のRosenlicht型構造定理について。

新潟大・教養 田島慎一
(Shinichi TAJIMA)

§1。 $F$ は原点 $(0,0)$ の近傍 $X \subset \mathbb{C}^2$ における既約平面曲線とし、$f=0$ をその定義方程式とする。$X$ 上の正則函数のなす層を $\mathcal{O}_X$ とし、$X$ 上の正則函数を係数とする線型偏微分作用素のなす層を $\mathcal{D}_X$ とおく。




このとき、$F$ に台を持つ algebraic local cohomology

$$\mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X) \overset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{k} \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/(f)^k, \mathcal{O}_X)$$

$$= \mathcal{O}_X(*F)/\mathcal{O}_X$$

は自然に $\mathcal{D}_X$-加群の構造を持ち、holonomic系

になることも知られている [5]。

ここでは $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ の具体的な構造を初等的に決定することを考える。

例　$F=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2 \mid f(x,y)=y^2-x^3=0\}$。

今
$$P=-\frac{1}{27}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{1}{8}\frac{\partial^3}{\partial y^3}y+\frac{1}{6}\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}x-\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$
$$b(s)=(s+1)(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})$$ とおけば

$$Pf^{s+1}=b(s)f^s$$ がなりたつから.

$$Pf^{-1}=(b(-2))f^{-2},\quad P^2f^{-1}=b(-2)b(-3)f^{-3}$$

等々を得る。従って $\mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{D}_X$-加群として. $u=\frac{1}{f} \bmod \mathcal{O}_X$ から生成される。更に

$$\begin{cases}\mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)=\mathcal{D}_X/\mathcal{J}. \\ \mathcal{J}=\mathcal{D}_Xf+\mathcal{D}_X(2x\frac{\partial}{\partial x}+3y\frac{\partial}{\partial y}+6)+\mathcal{D}_X(2y\frac{\partial}{\partial x}+3x^2\frac{\partial}{\partial y})\end{cases}$$

となる。

一般に $F$ の特異点の幾何的構造と $\mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ の $\mathcal{D}_X$-加群としての構造の関係を知りたいという好奇心が以下の計算の主な動機である。

<u>注意</u>　最近, Doorm-Essen, Smith-Stafford らが Vigué の仕事等をふまえて, 特異点を持つ曲線 $F$ 上の $\mathcal{D}_F$-加群のなす category を森田同型を使って調べている。

$F$ が特異点を持たないときの $\mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ の構造はよく知られているが, 復習しておく。

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2\},\quad Y = \{(x, y) \in X \mid x = 0\}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{H}^1_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$$ とおく。

$\mathcal{M}$ は $u = \frac{1}{x}$ によって $\mathcal{D}_X$ 上生成されており, しかも $xu = 0$ ( $x\frac{1}{x}$ は正則函数), $\frac{\partial}{\partial y} u = 0$ をみたすことから

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X x + \mathcal{D}_X \frac{\partial}{\partial y} = \mathcal{B}_{Y|X}$$

を得るが, 更に次の形の結果がある。

<u>命題</u>　$Y \hookrightarrow X$ が non-singular ならば，次がなりたつ。

(1) $\displaystyle\int_{X\leftarrow Y} \mathcal{O}_Y = \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \underset{\mathcal{D}_Y}{\otimes} \mathcal{O}_Y = \mathcal{M},$

(2) $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathcal{M}) = \mathcal{O}_Y .$

特に $Y$ 上の最も簡単な $\mathcal{D}_Y$-加群である $\mathcal{O}_Y$ の積分系として $\mathcal{H}^1_{[Y]}(\mathcal{O}_X)$ が得られることがわかる。

(2) について，証明の方針を与えておく。

$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathcal{M})$ は $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ を方程式系と見做して $\mathcal{M}$ に値を持つ"解"を計算すれば求まる。そこで

$$0 \leftarrow \mathcal{M} \xleftarrow{x} \mathcal{M} \leftarrow 0$$

の cohomology をとって

$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathcal{M}) = \mathrm{Ker}\, x \cong \mathcal{O}_Y$　がわかる。

$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}, \mathcal{M}) = \mathrm{Coker}\, x$　については

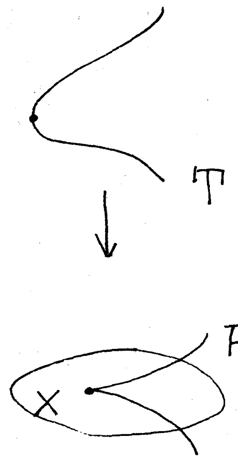
たとえば $\frac{\partial}{\partial x}x - x\frac{\partial}{\partial x} = 1$ より. $-x\frac{\partial}{\partial x} = 1 \in x\mathcal{M}$ が $\mathcal{M}$ の中でわかる。同様の計算をして $\mathrm{Coker}\, x = 0$ を得る。

## §2. Normalization の導入と予想.

$F$ は原点のみに特異点を持つ analytic で既約な plane curve とし, $F$ の normalization を $T$ とおく.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ F \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

と定める。




$\mathcal{M} = \mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ とおく。

次のことが予想される。

**基本予想 A**

(1) $\int_\pi \mathcal{O}_T = \mathcal{D}_{X\leftarrow T} \underset{\mathcal{D}_T}{\otimes} \mathcal{O}_T = \mathcal{M}$

(2) $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow T}, \mathcal{M}) = \mathcal{O}_T$

基本予想 B

(1) $\mathcal{M}$ は simple $\mathcal{D}_X$-加群

(2) $\mathcal{M}$ は non-singular part からの minimum 拡張と一致する。

この節の残りを使って $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X)$ を扱うのに，Fの normalization $\tilde{T}$ を導入するのが自然なことを説明する。その為に $F=\{y^2-x^3=0\}$ を例にとって以下考える。Puiseux 展開 $x=t^2,\ y=t^3$ をとる。このとき

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \longrightarrow 2t\dfrac{\partial}{\partial x}+3t^2\dfrac{\partial}{\partial y} \\ t\dfrac{\partial}{\partial t} \longrightarrow 2t^2\dfrac{\partial}{\partial x}+3t^3\dfrac{\partial}{\partial y} = 2x\dfrac{\partial}{\partial x}+3y\dfrac{\partial}{\partial y} \\ t^2\dfrac{\partial}{\partial t} \longrightarrow 2t^3\dfrac{\partial}{\partial x}+3t^4\dfrac{\partial}{\partial y} = 2y\dfrac{\partial}{\partial x}+3x^2\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

となる。他方，先に計算したように

$$\begin{cases} \mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_X/\mathcal{J} \\ \mathcal{J} = \mathcal{D}_X(y^2-x^3)+\mathcal{D}_X\left(2x\dfrac{\partial}{\partial x}+3y\dfrac{\partial}{\partial y}+6\right)+\mathcal{D}_X\left(2y\dfrac{\partial}{\partial x}+3x^2\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \end{cases}$$

がなりたつから，両者を比較すれば normalization を考え

ることは自然と思われる。今 $\mathcal{O}_{\bar{F}} = \mathcal{O}_X/(f)$ とおけば

$$
\begin{aligned}
p^*\mathcal{O}_{\bar{F}} &= \{ p^*(h) \mid h \in \mathcal{O}_{\bar{F}} \} \\
&= \{ \textstyle\sum a_{\alpha\beta} t^{2\alpha} t^{3\beta} \mid \sum a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \in \mathcal{O}_{\bar{F}} \} \\
&= \{ \textstyle\sum c_\gamma t^\gamma \mid c_1 = 0 \} \quad \subset \mathcal{O}_T
\end{aligned}
$$

となるが、$t\frac{\partial}{\partial t}$ 及び $t^2\frac{\partial}{\partial t}$ は $p^*\mathcal{O}_{\bar{F}}$ に作用することに注意しよう。

次に $2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 6$ の定数項 $6$ の意味について考えてみる。もともと方程式系の積分の理論は左加群よりも右加群で考えた方が自然なわけだから、今の場合も"関数"でなく"form"で考えた方が幾何的なこととの関連がはっきりつかめそうである。そこで次の Poincaré residue map を思いだそう。

$$
\frac{dx \wedge dy}{f(x,y)} \longrightarrow \left.\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}\right|_{f=0}
$$

今扱っている具体例では

$$
\frac{dx \wedge dy}{y^2 - x^3} \longrightarrow \left.\frac{dx}{2y}\right|_{f=0} = \frac{1}{t^2}\,dt
$$

となる。

注意：$\frac{1}{t^2}$ の指数 2 は $f=0$ の Milnor 数 $\mu = l(\mathbb{C}[[X, Y]]/(\frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y}))$ と一致し、$\delta = l(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}/\mathcal{O}_{\mathbb{F}})$ とおけば $\mu = 2\delta$ となることはよく知られている。

注意：$\frac{1}{t^2}$ を $\pi$ に沿って積分してみると

$$\int \frac{1}{t^2}\delta(x-t^2)\delta(y-t^3)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}\Big\{x^{-\frac{1}{2}}\delta(x^{\frac{1}{2}}-t)\delta(y-t^3) + x^{-\frac{1}{2}}\delta(x^{\frac{1}{2}}+t)\delta(y-t^3)\Big\}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\Big\{\delta(y-x^{\frac{3}{2}}) + \delta(y+x^{\frac{3}{2}})\Big\}$$

$$= \delta(y^2-x^3)$$

を得る。

次の節で、関数 $\frac{1}{t^2}$ のみたす微分方程式系

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_T / \mathcal{D}_T\left(t\frac{\partial}{\partial t}+2\right)$$

を考え、

$$\int_{X\leftarrow \mathbb{P}} \mathcal{M} = \mathcal{D}_{X\leftarrow \mathbb{P}} \otimes \mathcal{M}$$

と $\mathcal{H}^1_{[\mathbb{F}]}(\mathcal{O}_X)$ の関係を調べよう。

## §3. 方程式系の積分系の計算.

この節では $\int_\pi \mathcal{M}$ の計算を実行して、次の結果がなりたつことを示します。

定理

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^1_{[F]}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \int_\pi \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}^2_{[(0,0)]}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

は exact

注意　この結果は dualizing module $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/(f), \Omega_X^2)$ に対する Rosenlicht の定理の左 $\mathcal{D}_X$-加群版ともいうべきものになっている。

方程式系 $\mathcal{M}$ の積分の計算を実行するために、graph による embeding $i: T \longrightarrow T\times X = \tilde{X}$ を用意する。

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & T\times X = \tilde{X} \arrow[d, "pr"] \\ F \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

$$\int_{\pi}\mathcal{M} = \int_{P_t}\left\{\int_{i}\mathcal{M}\right\}$$ がなりたつが、簡単な計算により

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \int_{i}\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\tilde{X}}/\tilde{\mathcal{J}} \\ \tilde{\mathcal{J}} = \mathcal{D}_{\tilde{X}}(x-t^2) + \mathcal{D}_{\tilde{X}}(y-t^3) + \mathcal{D}_{\tilde{X}}\left(t\frac{\partial}{\partial t} + 2t^2\frac{\partial}{\partial x} + 3t^3\frac{\partial}{\partial y} + 2\right) \end{cases}$$

がわかる。

$$\mathbb{R}\int_{\pi}\mathcal{M} = \mathbb{R}\int_{P_t}\mathcal{L} = \int_{P_t}\mathcal{L} = \mathcal{L}\Big/\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}$$

となるから $\mathcal{L}/\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}$ の $\mathcal{D}_X$-加群としての構造を計算すればよい。

恒等式

$$t\frac{\partial}{\partial t} + 2t^2\frac{\partial}{\partial x} + 3t^3\frac{\partial}{\partial y} + 2$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}t + 2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 6 + 2\frac{\partial}{\partial x}(t^2-x) + 3\frac{\partial}{\partial y}(t^3-y)$$

より mod $\tilde{\mathcal{J}}$ で

$$\frac{\partial}{\partial t}(-t) \equiv 2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 6 \quad \in \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}$$

を得る。同様に

$$\frac{\partial}{\partial t}(-t^2) \equiv 2y\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial}{\partial y} \in \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}$$

等がわかる。

従って $u = 1 \bmod \tilde{\mathcal{J}} \in \mathcal{L}$ とおけば $\int_{pr} u$ は

$$\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X(y^2 - x^3) + \mathcal{D}_X\left(2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 6\right) + \mathcal{D}_X\left(2y\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

に対応することがわかる。しかし $\int_{pr}(tu)$ は $\mathcal{D}_X$ 上 $\int_{pr} u$ から生成できないので

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^1_{[H]}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \int_{pr}\mathcal{L}$$

は成りたつが一致しない。そこで $\int_{pr}(tu)$ のみたす方程式系を前と同様に計さんすることによって

$$(\#) \qquad \int_{pr}\mathcal{L} \quad \bmod \quad \mathcal{H}^1_{[H]}(\mathcal{O}_X)$$

なる $\mathcal{D}_X$-加群をもとめてみる。Leibniz の規則のみを使うことによって (#) は

$$\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X\left(2x\frac{\partial}{\partial x} + 3y\frac{\partial}{\partial y} + 5\right) + \mathcal{D}_X\left(2y\frac{\partial}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial}{\partial y}\right) + \mathcal{D}_X(y^2 - x^3)$$

となることがわかる。

更に ideal の計算をしてやれば

$$\mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X x + \mathcal{D}_X y = \mathcal{H}^2_{[(0,0)]}(\mathcal{O}_X)$$

と等しくなることが確かめられるから、結局

$$0 \to \mathcal{H}^1_{[\overline{\Pi}]}(\mathcal{O}_X) \to \int_\pi \mathcal{M} \to \mathcal{H}^2_{[(0,0)]}(\mathcal{O}_X) \to 0$$

exact

を得る。

注意. 方程式系の言葉でなく meromorphic differential form の言葉でいいかえてみると、$\mathcal{M} = \mathcal{O}[t^{-1}]$ と考えて、$m \in \mathcal{M}$ に対して $\int m \in \mathcal{H}^1_{[\overline{\Pi}]}(\mathcal{O}_X)$ となる必要十分条件は

$$\oint m \; p^*(h)(t)\, dt = 0 \qquad \forall h \in \mathcal{O}_X$$

となるので、上の結果は dualizing module と Rosenlicht differential の関係に対応する。

注意. Intersection cohomology に関する Vilonen の結果と比較せよ。

## §4. 基本予想との関係

さて $\mathcal{H}^1_{[\Pi]}(\mathcal{O}_X)$ が non-trivial な submodule を持たないとすると 例えば $\dfrac{x}{y^2-x^3} \mod \mathcal{O}_X$ からも $\mathcal{D}_X$ 上 $\mathcal{H}^1_{[\Pi]}(\mathcal{O}_X)$ は生成されるはずである.

$\dfrac{x}{y^2-x^3}dx\wedge dy$ の Poincaré residue は $\dfrac{x}{2y}dx = dt$

だから

$$\int_\pi \mathcal{O}_T = \mathcal{H}^1_{[\Pi]}(\mathcal{O}_X)$$

が成りたつのではないかと予想できる.

実際

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_T \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}^1_{[0]}(\mathcal{O}_T) \longrightarrow 0$$

exact

を積分して

$$0 \longrightarrow \int_\pi \mathcal{O}_T \longrightarrow \int_\pi \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}^2_{[(0,0)]}(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

exact

を得る。

他方

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^1_{[\overline{T}]}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \int_\pi \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{H}^2_{[(0,0)]}(\mathcal{O}_X) \rightarrow 0$$

exact

が既に示してあるから

$$\int_\pi \mathcal{O}_T \cong \mathcal{H}^1_{[\overline{T}]}(\mathcal{O}_X)$$

を得る。

次に $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow T}, \mathcal{H}^1_{[\overline{T}]}(\mathcal{O}_X))$ について考えてみる.

$i(T) = \{(t,x,y) \in T\times X \mid x = t^2,\ y = t^3\}$ とおくと

$\mathcal{D}_{X\leftarrow T} = \mathcal{H}^2_{[i(T)]}(\Omega^1_T \otimes \mathcal{O}_{T\times X})$ は $\mathcal{D}_X$ 上

$$m = \frac{dt}{(x-t^2)(y-t^3)} \quad と \quad tm = \frac{t\,dt}{(x-t^2)(y-t^3)}$$

とから生成されることに注意して $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow T}. \mathcal{H}^1_{[\overline{T}]}(\mathcal{O}_X))$ を計さんしてみると(計算に間違いがなければ)

$$\mathcal{O}_T \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_{X\leftarrow T}. \mathcal{H}^1_{[\overline{T}]}(\mathcal{O}_X))$$

を得る。

平面曲線 $f=0$ の Puiseux 展開が簡単な場合には全く同様な方法で —— Leibniz の規則だけで —— $\mathcal{D}_X$-加群の計算ができる。

曲面 $S$ に対する algebraic local cohomology $\mathbb{R}\Gamma_{[S]}(\mathcal{O}_X)$ の $\mathcal{D}_X$-加群としての構造が具体的に計算できるとおもしろいと思う。

以上。

## 文献


[1] J.-L. Brylinski, La classe fondamentale d'une variété algébrique engendre le D-module qui calcule sa cohomologie d'intersection, Astérisque **130** (1985), 260-271.

[2] M.G.M. van Doorn and A.R.P. van Essen, $D_n$-Modules with support on a curve, preprint.

[3] A. Grothendieck, Local cohomology, Lecture Notes in Math. **41** (1967).

[4] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems, Invent. math. **38** (1976), 33-53.

[5] ——————, On the holonomic systems of linear differential equations II, Invent. Math., **49** (1978), 121-152.

[6] K. Kodaira, On compact analytic surfaces I, Ann. Math., **71** (1960), 111-152.

[7] Lê Dũng Trang and Z. Mebkhout, Introduction to linear differential systems, Proc. Symposia in Pure Math., **40** (1983), part 2, 31-63.

[8] M. Lejeune-Jalabert, Le théorème "AF + BG" de Max Noether, Seminaire sur les singularités, Pub. Math. L'univ. Paris VII, (1980), 97-138.

[9] Z. Mebkhout, Local cohomology of analytic spaces, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **12** Supp. (1977), 247-256.

[10] S.P. Smith and J.T. Stafford, Differential operators on an affine curve, preprint.

[11] J.P. Vigué, Opérateurs differentiels sur les espaces analytique, Invent. Math., **20** (1973), 313-336.

[12] K. Vilonen, Intersection homology D-module on local complete intersections with isolated singularities, Invent. Math., **81** (1985), 107-114.

[13] T. Yano, Exponents of singularities of plane irreducible curves, Sci. Rep. Saitama Univ., **10**,2 (1982), 21-28.